

February 2, 1882.

THE PRESIDENT (followed by THE TREASURER) in the Chair.

The Presents received were laid on the table, and thanks ordered for them.

Mr. Henry Francis Blanford (elected 1880) was admitted into the Society.

The following Papers were read:—

- I. "Sur les Surfaces Homofocales du Second Ordre." By Lieut.-Colonel A. MANNHEIM, Professor in the École Polytechnique. Communicated by Dr. HIRST, F.R.S. Received January 19, 1882.

Un ellipsoïde (O) étant donné, on sait que par un point quelconque de l'espace, on peut faire passer trois surfaces du second ordre qui lui sont homofocales. La connaissance de l'ellipsoïde (O) entraînant la connaissance de ces surfaces homofocales, il existe des liaisons géométriques entre (O) et ces surfaces.

Je me propose d'établir, parmi ces liaisons, celles qui permettent d'obtenir les rayons de courbure principaux des trois surfaces homofocales. Pour cela, j'appliquerai d'abord un théorème que j'ai eu l'honneur de communiquer à la Société Royale (séance du 16 Juin, 1881) et dont je vais rappeler l'énoncé :

Un angle de grandeur constante, circonscrit à un ellipsoïde donné et dont le plan est normal à cette surface en chacun des points de contact des côtés de cet angle, se déplace de façon que son sommet reste sur l'ellipsoïde (E) homofocal à l'ellipsoïde donné : ce sommet décrit une ligne de courbure de (E).

Appelons c le sommet de l'angle mobile, $c a$, $c b$, ses deux côtés et a et b les points de contact de ces côtés avec l'ellipsoïde (O). L'angle $a c b$ n'est autre que l'une des sections principales du cône circonscrit à l'ellipsoïde (O) et dont le sommet est c . Si l'on prend un ellipsoïde homofocal à (O) et si on lui circonscrit de même un cône de sommet c , on sait que le plan de l'angle $a c b$ est aussi le plan d'une des sections principales de ce cône.

Appelons $c a'$, $c b'$, les génératrices qui forment cette section principale. On peut de même considérer une suite d'ellipsoïdes homofocaux à (O) et l'on aura pour chacun d'eux des droites telles que $c a$, $c b$,

$c a'$, $c b'$, &c. D'après ce que nous venons de rappeler, toutes ces droites sont dans le même plan, $a c b$.

Par le point c (fig. 1), élevons la droite G perpendiculairement au plan $a c b$. Les droites $c a$, $c b$, G forment un trièdre, que nous allons entraîner en même temps que l'angle $a c b$ et qui reste de grandeur invariable pendant le déplacement de cet angle. La droite G , ainsi entraînée, reste tangente en son point c à la ligne de courbure E décrite par ce point.

La caractéristique du plan de la face ($c a$, G) est la droite $c a$, car cette droite passe par les points où cette face touche E et l'ellipsoïde (O). Le lieu des positions du côté $c a$ est alors la surface développable enveloppe du plan ($c a$, G). Nous appellerons (a) la courbe, lieu des points de contact, tels que a , de cette surface développable et de (O).

Prenons cette courbe (a) comme directrice d'une normalie à l'ellipsoïde donné. Pendant le déplacement du trièdre le plan $a c b$ contient successivement une génératrice de cette normalie. Sa caractéristique passe alors par le point α , où il touche cette normalie. Mais la tangente en a à (a) et la tangente $a c$ sont deux tangentes conjuguées relativement à (O); le plan $a c b$ est alors un plan central de la normalie et le point α est le point central pour la génératrice $a \alpha$ de cette surface.

Le point α est aussi le centre de courbure de la courbe de contour apparent de l'ellipsoïde (O) projeté du point c sur un plan mené en a perpendiculairement à $c a$.* De même, en considérant des ellipsoïdes homofocaux à l'ellipsoïde (O) on aura pour les points a' , a'' . . . des centres de courbure α' , α'' . . . tels que α . Tous ces points sont aussi sur la caractéristique du plan $a c b$, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à une même droite.

Ce que nous venons de dire est applicable aux centres de courbure correspondant aux points b' , b'' . . . tels que b . Nous avons alors ce théorème :

Les centres de courbure des courbes de contour apparent d'une suite d'ellipsoïdes homofocaux, projetés coniquement d'un même point c sur des plans issus des points a , a' . . . b , b' . . . et perpendiculaires respectivement aux tangentes $c a$, $c a'$. . . $c b$, $c b'$. . . qui sont dans un même plan doublement normal à ces ellipsoïdes, appartiennent à une même droite.

Nous appellerons l cette droite (fig. 1). Puisque la droite l est la caractéristique du plan mobile $a c b$, et que ce plan reste constamment normal à la courbe E , nous voyons que :

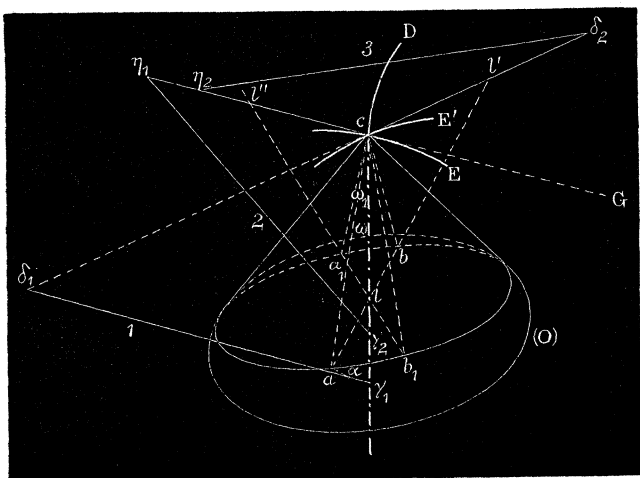
La droite l est l'axe de courbure de la courbe E .

Et alors :—

Le point γ , où elle rencontre la normale en c à l'ellipsoïde (E) est l'un des centres de courbure principaux de cette surface.

* Voir mon "Cours de Géométrie Descriptive," p. 300 et suivantes.

FIG. 1.



La courbe E est l'intersection de cet ellipsoïde et d'un hyperboloïde homofocal (D). La droite 1 rencontre alors la normale en c à cet hyperboloïde en un point δ_1 , qui est un centre de courbure principal de cet hyperboloïde.

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que l'angle $a c b$, section principale du cône de sommet c circonscrit à l'ellipsoïde (O). Prenons maintenant l'autre section principale, $a_1 c b_1$, de ce cône et supposons qu'on déplace le sommet c sur l'ellipsoïde (E), de façon que l'angle $a_1 c b_1$ reste de grandeur constante; le plan de cet angle restant toujours doublement normal à cet ellipsoïde. Le sommet c décrit alors sur (E) la ligne de courbure E' de cette surface et en raisonnant comme précédemment nous déterminons la droite 2, axe de courbure de E'.

La droite 2 rencontre au point γ_2 la normale en c à l'ellipsoïde (E), et au point η_1 la normale en c à l'hyperboloïde (H) homofocal à (O), et qui coupe (E) suivant la ligne de courbure E'. Les points γ_2 et η_1 sont des centres de courbure principaux.

Au moyen des droites 1 et 2 nous avons donc déterminé les deux centres de courbure principaux γ_1, γ_2 de l'ellipsoïde (E), et le problème de la détermination des éléments de courbure de cette surface est ainsi achevé.

Il n'en est pas de même pour les hyperboloïdes (D) et (H).

Pour chacune de ces surfaces nous n'avons encore déterminé qu'un seul centre de courbure principal: occupons nous maintenant de déterminer les deux autres.

L'illustre Chasles, dans son *Résumé d'une théorie des surfaces du*

second ordre homofocales,* est arrivé au théorème suivant, qu'il énonce ainsi :

Etant données deux surfaces homofocales A et A' ; si on leur circonscrit deux cônes ayant le même sommet : la courbe de contact de la surface A sera la focale d'une surface inscrite dans A' suivant la courbe de contact de celle-ci.

Appelons (S) la surface ainsi inscrite dans A' et menons par le sommet du cône un plan sécant. La section faite dans (S) par ce plan est doublement tangente à la section faite dans A' par ce même plan. Ceci est vrai, quel que soit le plan sécant ; il en résulte, lorsque le sommet du cône vient sur A', que :

Si l'on a une surface du second ordre A et un cône qui lui soit circonscrit, la surface du second ordre (S), qui a pour focale la courbe de contact de A et de ce cône, et qui est tangente au sommet de ce cône à une surface homofocale à A, a, avec cette surface en ce point, un contact du troisième ordre.

Supposons que le sommet du cône soit dans l'un des plans principaux de A ; la courbe de contact de A et de ce cône, c'est-à-dire la focale de (S), est alors rencontrée normalement par ce plan principal ; ces points de rencontre avec ce plan principal sont alors les foyers de la section faite dans (S) par ce plan. Nous sommes alors amenés au théorème suivant, qui a déjà été énoncé ainsi par M. Faure.†

Deux coniques homofocales étant données, si, d'un point m de l'une, on mène deux tangentes à l'autre et que l'on trace une conique passant par le point m et ayant pour foyers ces points de contact, elle aura avec la première un contact du troisième ordre au point m.

Reprenons maintenant l'ellipsoïde (O) et l'ellipsoïde (E) qui lui est homofocal. Projetons ces surfaces sur le plan (*a c b*) qui est le plan d'une section principale de (E). En vertu d'un théorème connu, les lignes de contour apparent de (O) et de (E) sur ce plan sont deux courbes homofocales. Mais la ligne de contour apparent de (E) *a*, pour rayon de courbure en *c*, le rayon de courbure principal, $c\gamma_2$ de (E) : on aura donc ce rayon $c\gamma_2$ en appliquant le théorème de Faure. Voici la construction qui, sur le plan (*a c b*) donne ce rayon de courbure : au point *a* on élève une perpendiculaire à *a c*. Du point où cette droite rencontre la normale $c\gamma_1$ on élève une perpendiculaire à cette normale. Cette perpendiculaire rencontre *c a* en un point que l'on joint par une droite au point obtenu de la même manière sur *c b* ; cette droite rencontre la normale $c\gamma_1$ au point γ_2 qui est le centre de courbure cherché.

On construit de la même manière sur la normale cd_1 le centre de

* "Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences." Séances des 11 et 18 Juin, 1860.

† "Recueil de Théorèmes relatifs aux Sections Coniques." Par M. H. Faure. (Paris : Gauthier-Villars. 1867.)

courbure δ_2 de l'hyperbole qui a pour foyers a et b , et qui passe par le point c . Ce point δ_2 est un centre de courbure principal de l'hyperboloïde (D).

En faisant usage des points a_1, b_1 , on retrouve le centre de courbure γ_1 et on détermine sur la normale ca_1 le centre de courbure principal η_2 de l'hyperboloïde (H).

Nous avons donc déterminé les centres de courbure principaux δ_2, η_2 qui nous restaient à trouver.

La droite δ_2, η_2 est l'axe de courbure de la courbe d'intersection D des deux hyperboloïdes (D) et (H).

Comme on a pu le remarquer, en même temps que nous déterminions les points δ_2, η_2 nous avons retrouvé les centres de courbure principaux de l'ellipsoïde (E).

Ces points γ_1, γ_2 établissent donc une liaison entre les constructions résultant des deux théorèmes absolument différents d'où nous sommes partis. Vérifions directement cette liaison et pour cela démontrons deux lemmes.

1°. *On donne un angle $m c n$ (fig. 2) et un point fixe i de sa bissectrice. Par le point i on mène la transversale $m n$ et des points m, n , on élève respectivement des perpendiculaires aux côtés de l'angle. Ces perpendiculaires rencontrent la bissectrice aux points m', n' : le conjugué harmonique i' de c , par rapport à m', n' est le même quelle que soit la transversale $m n$.*

En effet, on a
$$\frac{1}{cm} + \frac{1}{cn} = \frac{2 \cdot \cos \alpha}{ci};$$

en appelant α la moitié de l'angle donné. Il résulte de là :

$$\frac{1}{cm' \cos \alpha} + \frac{1}{cn' \cos \alpha} = \frac{2 \cdot \cos \alpha}{ci},$$

d'où
$$\frac{1}{cm'} + \frac{1}{cn'} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{ci}.$$

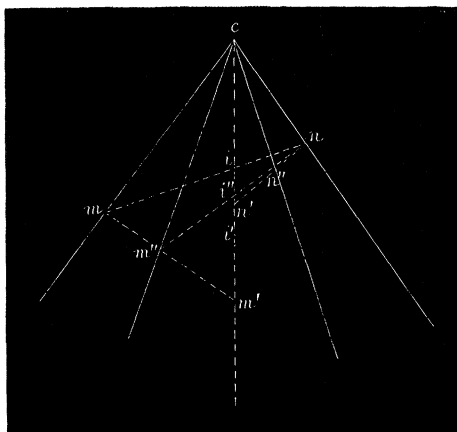
Mais le premier membre de cette égalité est égal à $\frac{2}{ci'}$, on a donc

$$ci' = \frac{ci}{\cos^2 \alpha}.$$

Cette valeur de ci' étant indépendante de la direction de $m n$, le lemme est démontré.

2°. *On donne deux angles $m c n, m'' c n''$ (fig. 2) ayant même sommet c et même bissectrice ci . Du point fixe i on mène une transversale $m n$ qui rencontre les côtés de l'un des angles en m, n . De ces points on élève respectivement à ces côtés les perpendiculaires $m m', n n''$. Ces droites rencontrent les côtés du second angle en m'', n'' : la droite $m'' n''$ coupe la*

FIG. 2.



bissectrice ci en un point i'' qui reste fixe, lorsque $m n$ tourne autour de i .

En effet, on a :

$$\frac{1}{cm} + \frac{1}{cn} = \frac{2 \cdot \cos \alpha}{ci}$$

d'où

$$\frac{1}{cm''} + \frac{1}{cn''} = \frac{2 \cos \alpha \cdot \cos (\alpha - \beta)}{ci},$$

en appelant β la moitié de l'angle $m''cn''$.

Mais le premier membre de cette égalité est égal à $\frac{2 \cos \beta}{ci''}$. On a

donc

$$\frac{1}{ci''} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos (\alpha - \beta)}{ci \cdot \cos \beta}.$$

Cette valeur de ci'' étant indépendante de la direction de $m n$, le second lemme est démontré.

Reprenons le cône circonscrit à (O) et dont le sommet est c (fig. 1). Appelons l le point où le plan $(a b, a_1 b_1)$ rencontre la normale $c\gamma_1$. Faisons tourner le plan $a_1 c b_1$ autour de $c l$ pour le faire coïncider avec le plan $a c b$. Désignons par ω l'angle $l c a$ et par ω_1 l'angle $l c a_1$; nous supposons ω plus grand que ω_1 . Ainsi amenés en coïncidence les angles $a c b, a_1 c b_1$ forment, sur le plan $a c b$, une figure analogue à la figure (2).

Il résulte du second lemme que le centre de courbure γ_1 peut s'obtenir, comme précédemment, en menant sur le plan $a c b$ et par le point l une droite quelconque. Prenons alors la transversale menée par le point l perpendiculairement à $c l$. Cette droite rencontre les côtés de l'angle $a c b$ aux extrémités du grand axe de l'ellipse qui

résulte de l'intersection du cône et d'un plan, issu du point l et perpendiculaire à cl . Appelons (l) cette ellipse de centre l .

Les demi-axes de l'ellipse sont égaux à $cl \operatorname{tang} \omega$, $cl \operatorname{tang} \omega_1$. Le rayon de courbure ρ de cette courbe à l'extrémité du grand axe est alors égal à $\frac{cl \operatorname{tang}^2 \omega_1}{\operatorname{tang} \omega}$.

D'après le second lemme le centre de courbure principal du cône correspondant à l'extrémité du grand axe de (l) se projette sur cl au point γ_1^* .

On a alors

$$c\gamma_1 = cl + l\gamma_1 = cl + \rho \operatorname{tang} \omega,$$

et en introduisant la valeur de ρ , il vient :

$$c\gamma_1 = \frac{cl}{\cos^2 \omega_1}.$$

Mais cette valeur de $c\gamma_1$, on l'obtient directement d'après le premier lemme en prenant la section principale $a_1 c b_1$; la vérification que nous nous proposons de faire est donc achevée.

Nous avons en outre les expressions des rayons de courbure principaux des surfaces homofocales à (O) , ainsi :

$$c\gamma_1 = \frac{cl}{\cos^2 \omega_1}, \quad c\gamma_2 = \frac{cl}{\cos^2 \omega}.$$

De la même manière en appelant l' et l'' les points de rencontre du plan $(ab, a_1 b_1)$ avec les normales $c\delta_1$, $c\eta_1$ on a :

$$c\delta_2 = \frac{cl'}{\sin^2 \omega}, \quad c\eta_2 = \frac{cl''}{\sin^2 \omega_1}.$$

Pour déterminer $c\delta_1$ et $c\eta_1$, nous n'avons qu'à considérer le demi-angle compris entre les asymptotes de l'ellipse (l) . Appelons ϕ cet angle. On a :

$$\operatorname{tang}^2 \phi = \frac{-cl^2 \operatorname{tang}^2 \omega_1}{cl^2 \operatorname{tang}^2 \omega} = -\frac{\operatorname{tang}^2 \omega_1}{\operatorname{tang}^2 \omega},$$

d'où

$$\cos^2 \phi = \frac{\operatorname{tang}^2 \omega}{\operatorname{tang}^2 \omega - \operatorname{tang}^2 \omega_1},$$

et par suite

$$c\delta_1 = \frac{cl'(\operatorname{tang}^2 \omega - \operatorname{tang}^2 \omega_1)}{\operatorname{tang}^2 \omega}, \quad c\eta_1 = \frac{cl''(\operatorname{tang}^2 \omega - \operatorname{tang}^2 \omega_1)}{\operatorname{tang}^2 \omega_1}.$$

Il faut remarquer que δ_2 et le point l' sont par rapport à c d'un même côté sur la normale cl' , et que le centre de courbure δ_1 est de côté différent si nous supposons que δ_1 et δ_2 soient les centres de cour-

* Cette perpendiculaire à cl qui donne le point γ_1 remplace la droite l , dont nous avons parlé précédemment.

bure principaux de l'hyperboloïde à une nappe (D) qui est une surface à courbures opposées.

Au moyen de ces valeurs, on vérifie tout de suite le théorème de Lamé qui consiste en ce que le produit $c\gamma_1 \times c\delta_2 \times c\eta_1$ est égal à moins le produit $c\gamma_2 \times c\delta_1 \times c\eta_2$.

Puisque les rayons de courbure principaux $c\gamma_1$, $c\gamma_2$ ne dépendent que du segment cl et des angles compris entre les génératrices qui forment les sections principales du cône de sommet c , on a le théorème suivant :

On donne un cône du second ordre de sommet c , un point l sur l'un de ses axes, et par ce point on mène un plan arbitraire qui coupe le cône suivant une certaine courbe. Le long de cette courbe on inscrit dans le cône une surface du second ordre quelconque, et l'on construit la surface homofocale à celle-ci qui passe en c et qui a pour normale en ce point la droite cl . Cette surface et toutes les surfaces analogues, que l'on obtient en faisant varier le plan sécant mené par l et les surfaces du second ordre inscrites, sont osculatrices entr'elles au point c .

Reprenons la ligne de courbure E de l'ellipsoïde (E), cette ligne étant le lieu du sommet de l'angle constant acb , il résulte de l'expression de $c\gamma_2$ que :

Les rayons de courbure tels que $c\gamma_2$ des sections faites dans (E) par des plans normaux à E sont proportionnels aux segments tels que cl .

La ligne de courbure E peut être engendrée, comme nous l'avons dit en commençant, en employant l'un quelconque des ellipsoïdes homofocaux à (O). Parmi ceux-ci nous pouvons prendre celui qui, limité à l'ellipse focale de (E), est infiniment aplati et appliquer le résultat précédent. Nous voyons alors que :

Les rayons de courbure, tels que $c\gamma_2$, des sections faites dans (E) par des plans normaux à E sont proportionnels aux segments compris sur ces rayons entre les points de E et les points où ces rayons rencontrent le plan de l'ellipse focale de (E).

Comme les plans principaux d'un ellipsoïde déterminent sur une normale quelconque de cette surface des segments proportionnels, on peut remplacer dans cet énoncé le plan de l'ellipse focale par l'un quelconque des plans principaux de l'ellipsoïde.

Appelons n le point où la normale cl rencontre le plan de l'ellipse focale de (E). Puisque les rayons de courbure tels que $c\gamma_2$ pour les points de E sont proportionnels à cl et à cn , ces segments sont proportionnels entr'eux. On a alors ce théorème :

Les normales à (E), issues des points de E , sont partagées par les plans polaires de ces points pris par rapport à des ellipsoïdes homofocaux à (E), en segments proportionnels.

Cherchons comment varient pour les points de E les rayons de courbure, tels que $c\gamma_1$, des sections faites dans (E) par des plans normaux à cette surface et tangents à E .

On sait, depuis Dupin,* que le produit des rayons de courbure principaux en un point d'une surface de second ordre est inversement proportionnel à la quatrième puissance de la distance du centre de la surface au plan tangent en ce point.

Appelons op la perpendiculaire abaissée de o sur le plan tangent en c à (E) . On a alors $c\gamma_1 \times c\gamma_2 = \frac{\text{const}^e}{op^4}$.

Et comme le produit $op \times cn = \text{const}^e$, on a donc

$$c\gamma_1 \times c\gamma_2 = \text{const}^e \times cn^4.$$

Mais pour les points de E les rayons de courbure tels que $c\gamma_2$ sont proportionnels à cn ; d'après cela nous retrouvons ce théorème connu.

Les rayons de courbure, tels que $c\gamma_1$, des sections faites dans E par des plans normaux à cette surface et tangents à E , sont proportionnels au cube des normales issues des points de cette courbe.†

Et comme $\frac{cl}{cn}$ est constant pour les points de E , nous ajoutons :

Ces rayons de courbure sont aussi proportionnels aux cubes des segments tels que cl .

D'après cela on peut écrire :

$$\frac{cl}{\cos^2 \omega_1} = \text{const} \times \bar{cl}^3,$$

d'où $cl \times \cos \omega_1 = \text{const}^e$. Ainsi :

Les projections des segments tels que cl sur les droites telles que ca_1 , sont de grandeur constante, quelle que soit la position de c sur E .

La ligne de courbure E peut être prise dans l'un des plans principaux de (E) ; on voit ainsi que ce théorème s'applique à deux coniques homofocales.

Prenons arbitrairement un ellipsoïde homofocal à (O) . Soit, dans le plan $a_1 c b_1$ la génératrice ca_2 du cône de sommet c qui est circonscrit à cette surface. On a

$$c\gamma_1 = \frac{cl}{\cos^2 \omega_1} = \frac{cl_1}{\cos^2 \omega_2},$$

en appelant cl_1 et ω_2 les éléments relatifs à cette surface et qui sont analogues à cl et ω_1 . Mais cl_1 est proportionnelle à cn . Donc le rapport $\frac{cl}{cl_1}$ est constant pour les points de E . On voit alors que

$\frac{\cos \omega_1}{\cos \omega_2} = \text{const}^e$; ou en prenant les compléments des angles :

* "Développements de Géométrie," p. 212.

† De ce théorème résulte facilement que :—*Les lignes de contour apparent de (E) , projeté orthogonalement sur des plans normaux à cette surface et tangents à E , sont des ellipses de même aire.*

Les droites telles que $c a_1$, $c a_2$, font avec le plan tangent en c à (E) des angles dont le rapport des sinus est constant, quelle que soit la position de c sur E.

Ce théorème étant vrai pour la ligne de courbure de (E), qui est dans l'un des plans principaux de cette surface, s'applique à des coniques homofocales ; par conséquent :

Etant données trois coniques homofocales, si d'un point c de l'une, on mène une tangente à chacune des deux autres : le rapport des sinus des angles, que ces tangentes font avec la tangente en c à la première, est constant, quelle que soit la position de c sur cette courbe.

Voici encore un moyen de faire voir comment sont liés entr'eux les centres de courbure principaux des trois surfaces homofocales à (O) qui passent par c .

Dans le plan ($a c b$) les points γ_3 et δ_2 sont les centres de courbure de deux coniques qui ont pour foyers les points a et b , et qui passent par c . On sait alors* que le point δ_2 , relatif à l'une de ses courbes, est le pôle de la droite $c \gamma_2$ par rapport à l'autre courbe. Il résulte de là que la droite $\gamma_2 \delta_2$ est perpendiculaire à la droite qu'on obtient en prenant la symétrique, par rapport à $c \gamma_2$, de la projection du diamètre $o c$ sur le plan ($a c b$).†

De même pour la droite $\gamma_1 \delta_1$, elle est perpendiculaire au symétrique, par rapport à la normale $c l$, de la projection sur le plan $a_1 c b_1$ du même diamètre $o c$. On peut alors dire :

Les droites $\gamma_1 \delta_1$, $\gamma_2 \delta_2$, sont perpendiculaires à la direction suivant laquelle le diamètre $o c$ serait réfléchi en c si la surface (E) était réfléchissante.

II. "On Measuring the relative Thermal Intensity of the Sun, and on a Self-Registering Instrument for that Purpose."

By E. FRANKLAND, D.C.L., F.R.S. Received January 24, 1882.

The thermometric estimation of relative solar intensity, according to the best known means, requires first the determination of the temperature of the air—so-called shade temperature—and secondly, and simultaneously, that of a thermometer with a blackened bulb placed *in vacuo* in the sunshine—sun temperature: the difference

* Voir "Treatise on Conic Sections." By Rev. G. Salmon. (6th edition, p. 56.)

† Pour arriver à ce résultat, il suffit d'appliquer au point δ_2 de la tangente $c \delta_2$, ce théorème dû à M. Ribaucour :—"D'un point m , pris arbitrairement sur la tangente en c à une conique, on abaisse des perpendiculaires sur la polaire de m et sur le diamètre aboutissant en c , elles interceptent, sur la normale en c , un segment égal au rayon de courbure en ce point."

FIG. 1.

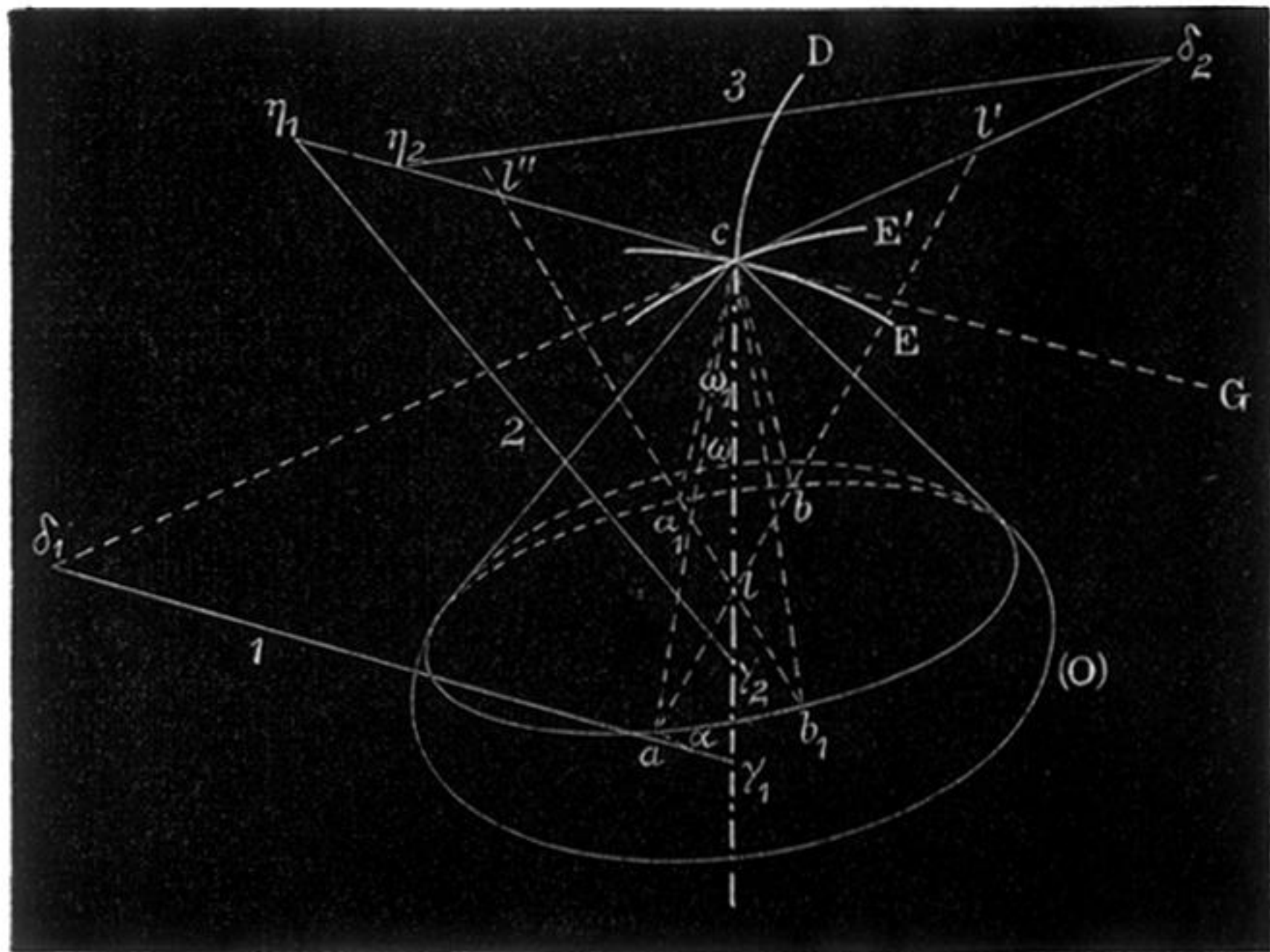


FIG. 2.

